Concours Commun I.N.A. et E.N.S.A. session 1987

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION

(Option générale)

DURÉE : 3 heures

On définit une fonction f par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1.1. Étudier les variations de f et construire son graphe Γ dans un repère orthonormé. On précisera le point d'inflexion I et la demi-tangente au point d'arrêt.

1.2. *a.* Déterminer les coordonnées du point A de Γ, distinct de O, en lequel la tangente à Γ passe par O.

b. Montrer qu'il existe deux points de Γ, distincts de A, et deux seulement, en lesquels la tangente à Γ est parallèle à (OA).

1.3. Selon les valeurs de m, discuter le nombre de points de Γ en lesquels le coefficient directeur de la tangente vaut m.

1.4. L'aire comprise entre la courbe Γ, l'axe Oy, la droite d'équation $y = 1$ et la droite d'équation $x = a > 0$ a-t-elle une limite finie quand $a \to +\infty$?

2.1. *a.* Montrer que pour tout entier n positif et pour tout x non nul,

$f^{(n)}(x) = P_n(x)\, x^{-2n}\, e^{-\frac{1}{x^2}}$, où P_n est un polynôme. Expliciter P_1 et P_2.

b. Déterminer le terme de plus haut degré de P_n et son terme constant.

2.2. En utilisant une équation différentielle du premier ordre que vérifie $f(x)$ et la formule donnant la dérivée n-ième d'un produit, déterminer une relation de récurrence (R) entre P_n, P_{n-1} et P_{n-2}.

2.3. *a.* Démontrer les relations :

(1) $P_n'(x) = -n(n-1)\, P_{n-1}(x)$;

(2) $n(n-1)\, P_n(x) + [1 - (2n-2)x]\, P_n'(x) + x^2 P_n''(x) = 0$.

b. Déterminer tous les coefficients de P_n en utilisant la relation (2).

c. Expliciter P_3 et P_4.

2.4. En utilisant notamment le théorème de ROLLE, démontrer que pour $n > 2$, les zéros de P_n sont réels, strictement positifs, distincts et séparés par les zéros de P_{n-1}.

3.1. On se propose de calculer les abscisses α et β ($\alpha < \beta$) des points définis au 1.2. *b*.

a. Construire le graphe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $(x \neq \pm e^{1/2})$

$$g(x) = \frac{1}{1 - 2\ln|x|}$$ (ln : logarithme népérien).

b. Étudier la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{4} \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = g(u_n)$$

et montrer qu'elle converge vers β ; calculer β à 0,01 près.

c. Est-il possible de déterminer d'une manière analogue, le nombre α ?

3.2. *a.* Montrer que l'équation de la tangente à Γ en un point quelconque d'abscisse x_0 est :

$$y = mx + mx_0(x_0 - 1), \quad \text{où} \quad m = f'(x_0).$$

b. Discuter, selon les valeurs de p, le nombre de points d'intersection de Γ avec la droite d'équation :

$$y = \frac{x}{e} + p.$$

4. Soit F une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ et soit G_n définie sur $\mathbb{R}_*^+$, pour tout entier naturel n strictement positif, par :

$$G_n(x) = x^{n-1} F\left(\frac{1}{x}\right).$$

4.1. Établir la formule :

$$F^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n\, x^{n+1}\, G_n^{(n)}(x).$$

4.2. Calculer $G^{(n)}(x)$ pour F : $x \longmapsto e^{-x}$. Quelle relation liant $P_1, P_2, \ldots, P_n$ peut-on en déduire ?

• • •
•